פרק דוגמה · ספר הגאומטריה · זרם תורני

האלכסון הנסתר

משפט פיתגורס, תשע תחנות, וסיפור מסגרת אחד: פנקס ישן של בנאי שבנה סוכות והתקין עירובין, וידע על האלכסון סוד. אחרי פרקי זוויות ישרות וריבועים.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

גרסה תורנית



01 סיפור מסגרת: פנקס הבנאי

STATION 1 · FRAME STORY

כל ספר בסדרה נפתח בסיפור מסגרת אחד שממשיך מפרק לפרק. זה הסיפור של ספר הגאומטריה.

נתן בן 13. בעליית הגג של בית סבו הוא מוצא פנקס ישן, כרוך בבד, עם פינות שחוקות. סבו היה בנאי: התקין עירובין בחצרות, בנה סוכות בכל השכונה, וידע בלי סרגל כמה קרש יחזיק. הפנקס מלא בשרטוטים, בחשבונות של אמות וטפחים, ובשוליו ציטוטים מהמשנה ומהגמרא שסבו רשם לעצמו כדי לא לטעות. בעמוד הראשון כתוב בכתב יד גדולה:

> **"מודדים פעמיים, חותכים פעם אחת. ואם אי אפשר למדוד, מחשבים."**
>
> מהפנקס של סבו

כל פרק בספר הזה פותח עוד דף מהפנקס, ובכל דף מסתתרת בעיה אמיתית שסבו פתר, או כמעט פתר. היום נתן מגיע לדף עם הסוכה.

סיפור המסגרת בדיוני. כל המקורות המצוטטים בפרק אמיתיים ומופיעים ברשימת המקורות בסוף.

02 הסיפור הפנימי: קרש אחד חסר

STATION 2 · THE PROBLEM

סוכות בעוד שבוע. נתן ואביו בונים סוכה מרובעת במרפסת, ארבע אמות על ארבע אמות, בערך שני מטר על שני מטר. נשאר קרש אחד אחרון שצריך להניח באלכסון, מפינה לפינה, כדי לייצב את המבנה. הבעיה: הסרגל של אביו קצר מדי כדי למדוד את האלכסון עצמו, והחנות כבר סגורה לחג.

נתן פותח את הפנקס. בעמוד שמתאים בדיוק, סבו רשם כלל בן אלפיים שנה:

> **"כל אמתא בריבועא, אמתא ותרי חומשי באלכסונא"**
>
> תלמוד בבלי, עירובין נז ע"א
>
> כלומר: אלכסון של ריבוע ארוך מהצלע בערך פי 1.4

נתן מחשב: ארבע אמות כפול 1.4 יוצא 5.6 אמות. הוא מודד עם חבל ארוך, ויוצא לו קצת יותר. משהו לא מסתדר: או שהפנקס טועה, או שהוא טועה. הוא הופך עמוד ומוצא פתק קטן תקוע בין הדפים, בכתב ידו של סבו: "תשב"ץ שאלה קסה. רמב"ם, עירובין. יש כאן סוד."

מה סבו ידע על האלכסון שנתן עוד לא? כדי לענות, צריך לצאת למסע בשרשרת האנשים שמדדו לפניו.

הפרק עובר 9 תחנות, בלי יוצא מן הכלל

1 סיפור מסגרת
2 סיפור פנימי
3 היסטוריה
4 מה זה
5 למה זה עובד
6 איך משתמשים
7 נסיון בפועל
8 תרגולים
9 גשר לפרק הבא

03 ההיסטוריה: שרשרת המדידה

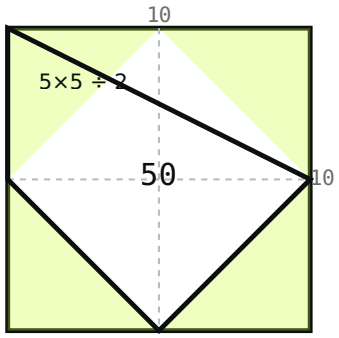
מקורות תורניים בלבד. דור אחר דור, כל אחד מדד, בדק את הקודם, והשאיר שאלה לבא אחריו.

חכמי התלמוד

קובעים כלל מדידה: "כל אמתא בריבועא, אמתא ותרי חומשי באלכסונא" (עירובין נז ע"א). האלכסון שווה לצלע כפול 1.4.

בעלי התוספות

(סוכה ח ע"א ד"ה כל אמתא) בודקים ומציינים שהחשבון אינו מכוון: "איכא טפי פורתא", יש קצת יותר. ההוכחה שלהם מופיעה באיור: ריבוע 10 על 10 מחולק לארבעה ריבועים של 5 על 5, ובתוכו ריבוע מוטה ששטחו חצי, כלומר 50. לפי כלל 1.4 הצלע שלו 7 והשטח 49 בלבד. אורך האלכסון האמיתי הוא בערך 1.414.



ההוכחה של בעלי התוספות: הריבוע המוטה בתוך 10×10 שווה בדיוק לחצי, 50 ולא 49.

סוגיית הסוכה העגולה

(סוכה ח ע"א) שני הקירובים יחד: אלכסון פי 1.4 מהצלע, והיקף פי 3 מהקוטר. ריבוע שצלעו אמה, אלכסונו אמה ושני חומשים, והיקף העיגול החוסם אותו הוא 3 כפול 1.4, כלומר 4.2 לכל צלע, ובסך הכול "שש עשרה וארבעה חומשים" לארבע צלעות.

ר' אברהם בר חייא הנשיא

מחכמי המדידה של ספרד, נותן שיעור מדויק יותר: אחת ושני חומשים ועוד כמעט חלק אחד משבעים, בערך 1.4142.

הרמב"ם

בפירוש המשניות (עירובין א, ה וב, ה) קובע שאת האלכסון אי אפשר לדעת בדיוק גמור, לא מחולשה אלא מטבע החשבון, ולכן חכמים הסתפקו בקירוב.

התשב"ץ

דן מאוחר יותר בשאלה למה בהלכה מסתפקים בקירוב (שו"ת תשב"ץ סימן קסה).

כלומר

מאות שנים לפני שהמושג "מספר אי רציונלי" קיבל שם, חכמים ידעו שהאלכסון הוא מספר מסוג אחר לגמרי.

והפתק של סבו?

נתן מבין עכשיו מה סבו רשם לעצמו: הכלל בפנקס הוא קירוב מכובד בן אלפיים שנה, לא טעות שלו. אבל מה כן האורך האמיתי? בשביל זה צריך את המשפט עצמו.

מה הלומד לוקח מהשרשרת

1. כל דור בדק את הקודם במדידה ובחשבון, לא מתוך כבוד אלא מתוך בקשת דיוק.
2. הכלל נשאר שימושי גם אחרי שידעו שהוא קירוב, כי קירוב טוב שכולם מכירים שווה יותר מדיוק שאי אפשר למדוד בשטח.
3. והשאלה שנשארה בפתק של סבו היא בדיוק השאלה שהרמב"ם נגע בה: את הדיוק הגמור אי אפשר לכתוב, אבל אפשר להבין למה.

04 מה זה

במשולש ישר זווית, הריבוע שבונים על היתר שווה בדיוק לסכום הריבועים שבונים על שני הניצבים.

בסימון מודרני: $a^2 + b^2 = c^2$, כאשר a ו-b הם הניצבים (הצלעות שיוצרות את הזווית הישרה) ו-c הוא היתר (הצלע שמול הזווית הישרה, תמיד הארוכה ביותר).

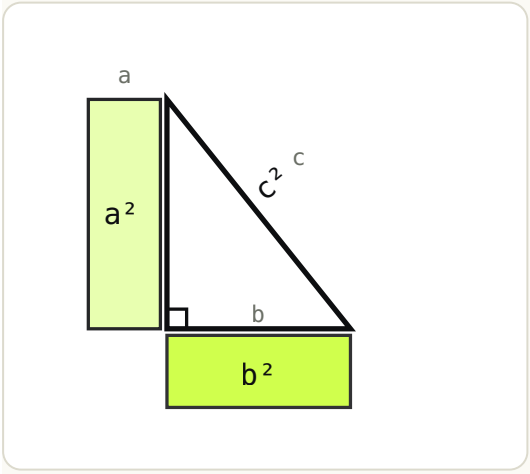
זווית ישרה: זווית של 90 מעלות בדיוק, כמו הפינה של דף.

ניצבים: שתי הצלעות שיוצרות את הזווית הישרה.

יתר: הצלע הארוכה שמול הזווית הישרה. בסוכה של נתן ובלוח של מיה, זה האלכסון.

בריבוע: מספר כפול עצמו. a^2 הוא גם שטח של ריבוע שצלעו a, ולכן המשפט הוא על שטחים, לא רק על אורכים.

דוגמה: ניצבים של 3 ו-4. הריבועים הם 9 ו-16, וביחד 25. היתר הוא המספר שהריבוע שלו 25, כלומר 5. שלשה כזו, 3-4-5, תלווה אותנו לאורך כל הפרק.



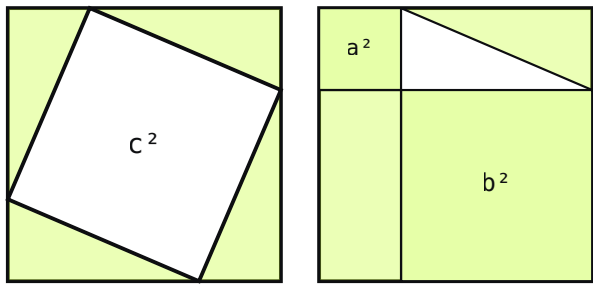
הריבועים על הניצבים שווים ביחד לריבוע על היתר. רואים, לא משננים.

05 למה זה עובד

הוכחת ההזזה: לא "ככה זה, תשננו", אלא הוכחה אחת שרואים בעיניים, ונכונה לכל משולש ישר זווית בעולם.

1 בונים ריבוע גדול שצלעו a + b, ומניחים בפינותיו 4 עותקים זהים של אותו משולש ישר זווית. באמצע נשאר ריבוע מוטה. כל צלע שלו היא היתר c, ולכן שטחו c^2.

2 מסדרים את אותם 4 משולשים מחדש בתוך אותו ריבוע גדול, בלי לשנות אותם. הפעם השטח הפנוי מתפצל לשני ריבועים: אחד a^2 ואחד b^2.



אותו ריבוע גדול, אותם ארבעה משולשים (בירוק). משמאל נשאר c^2, מימין a^2+b^2. השטח הפנוי שווה.

3 אותו ריבוע גדול, אותם 4 משולשים, ולכן השטח הפנוי חייב להיות שווה בשתי הסידורים: $c^2 = a^2 + b^2$. זה הכול.

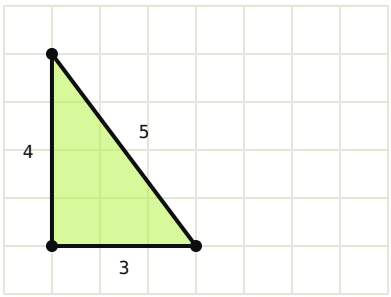
שימו לב מה קרה כאן: לא מדדנו משולש אחד וקיווינו לטוב. הראינו שהשוויון נכון לכל a וכל b, כי ההזזה עובדת תמיד. זה ההבדל בין ניחוש להוכחה.

עכשיו הסוד ברור

אלכסון של ריבוע שצלעו 1: לפי המשפט $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. כלומר c הוא המספר שהריבוע שלו 2. כלל המשנה, 1.4, נותן $1.4^2 = 1.96$. קרוב, אבל לא 2. הפער הקטן הזה הוא בדיוק "טפי פורתא" של בעלי התוספות, והסיבה שהרמב"ם קובע שדיוק גמור לא יושג לעולם: אין שבר שריבועו 2. המספר הזה נקרא היום שורש 2.

בדיקה קטנה על נייר משבצות

סמנו על דף משבצות משולש עם ניצבים של 3 ו-4 משבצות, ובנו ריבוע על כל צלע. ספרו משבצות: 9, 16 ו-25. עכשיו נסו ניצבים של 2 ו-3: הריבועים הם 4 ו-9, וביחד 13. איזו צלע שלמה נותנת ריבוע של 13? אין כזו, והיתר יוצא בין 3 ל-4 משבצות. גם כאן המספרים מסרבים לצאת שלמים, בדיוק כמו באלכסון של הסוכה.



3 משבצות ו-4 משבצות נותנים בדיוק 5. ספרו בעצמכם: 9 ועוד 16 הם 25.

נסו גם בבית

חצי משבצת גם עובד: ניצבים של 1.5 ו-2 נותנים היתר של 2.5 בדיוק. ואם תכפילו את 3-4-5 פי שתיים תקבלו 6-8-10, עוד שלשה שלמה. יש אינסוף שלשות כאלה, והמשפט מוצא את כולן. לסיום, מדדו אלכסון של משהו קטן בבית: מסך טלפון, פתק, מגש. חשבו אותו קודם בראש, ואז בדקו בסרגל. אם הניחוש יצא מדויק, סימן שהמשפט כבר שלכם.

06 איך משתמשים

STATION 6 · IN REAL LIFE

זווית ישרה בלי מד זווית

בנאי מסמן על הקרקע 3 ו-4 מטרים, מודד שהאלכסון יוצא 5, ויודע שהפינה ישרה בדיוק. כך עובדים בנאים עד היום.

מרחקים בלי להגיע

רוחב של נהר, גובה של מגדל, דרך קצרה מעל חצר: מודדים שתי צלעות נוחות ומחשבים את השלישית.

ניווט ו-GPS

המרחק שהטלפון מחשב בין שתי נקודות על המפה נגזר מהפרשי הצפון-מזרח, בדיוק לפי המשפט הזה.

גודל מסך

ה"אינטשים" של טלוויזיה או טלפון הם אורך האלכסון של המסך. רוחב וגובה נכנסים, אלכסון יוצא.

סוכה ועירוב

ריבוע התחום בעירובין נמדד כריבוע, והאלכסון שלו קובע כמה רחוק מותר ללכת בפינות. בדיוק שם נולד כלל 1.4 שבפנקס של סבו.

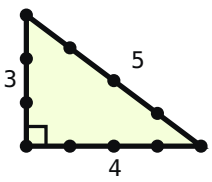
החזרה לסוכה של נתן

4 אמות על 4 אמות. לפי המשפט: 16 ועוד 16 הם 32, ושורש 32 הוא בערך 5.66 אמות. כלל המשנה נותן 5.6. הקרש צריך להיות בערך 5.66 אמות, קצת יותר ממה שסבו רשם.

07 נסיון בפועל: חבל 12 הקשרים

STATION 7 · HANDS ON

1. קחו חבל, וסמנו עליו 12 קשרים במרחקים שווים. המרחק יכול להיות אגרוף אחד שלכם.
2. קופלו את החבל למשולש: 3 קטעים לצלע אחת, 4 קטעים לשנייה, 5 קטעים לשלישית, והחזיקו בקשרים שבפינות.
3. הזווית שבין הצלע של 3 לצלע של 4 תצא ישרה בדיוק, בלי מד זווית בכלל. בדקו מול פינת דף.
4. ועכשיו הפוך: מדדו את החדר שלכם באורך וברוחב, חשבו את האלכסון לפי המשפט, ואז בדקו עם החבל או עם סרגל. ניחוש מדויק בפעם הראשונה.



חבל עם 12 קשרים במרחקים שווים, מקופל ל-3-4-5: זווית ישרה מושלמת.

למה זה עובד?

כי 3^2 ועוד 4^2 הם 9 ועוד 16, כלומר 25, שזה 5^2. כל משולש שהצלעות שלו מקיימות את המשפט חייב להיות ישר זווית. זה המשפט ההפוך, והוא הבסיס לבדיקת הזוויות של הבנאים.

08 תרגולים

רק עכשיו, אחרי שיש למה ואיך. התרגילים מדורגים: שלשות שלמות, בעיות מהחיים, ובסוף האתגר האמיתי.

רמה 1 · שלשות שלמות

1. הניצבים 3 ו-4. מה היתר?
2. הניצבים 5 ו-12. מה היתר?
3. הניצבים 6 ו-8. מה היתר? (רמז: תשימו לב לקשר ל-3-4-5.)

רמה 2 · מהחיים

1. חדר של 3 מטר על 4 מטר. מרצפים פס שטיח באלכסון, מפינה לפינה. כמה מטר שטיח צריך?
2. סולם נשען על קיר. בסיס הסולם 1.5 מטר מהקיר, וראשו מגיע לגובה 2 מטר. כמה ארוך הסולם?
3. מסך מלבני ברוחב 40 ס"מ ובגובה 30 ס"מ. מה גודל המסך באלכסון, כמו שכותבים בחנות?

רמה 3 · האתגר

1. תוכיחו שאלכסון של ריבוע שצלעו 1 לא יכול להיות שבר. הדרך: נניח שהוא שבר מצומצם a/b. אז $a^2 = 2b^2$. מה אפשר להסיק מכאן על a, זוגי או אי זוגי? ומה נובע מזה על b? ולמה זו סתירה?
2. בונוס, חזרה לכלל המשנה: לפי כלל 1.4, אלכסון של ריבוע 5 על 5 אמות הוא 7 אמות. בדקו במחשבון: שורש 50 הוא בערך 7.071. בכמה אחוזים בערך טועה הכלל? פחות או יותר מאחוז אחד?

פתרונות בקצרה

רמה 1: 5, 13, 10 (פי שתיים מ-3-4-5). רמה 2: 5 מטר; 2.5 מטר; 50 ס"מ. רמה 3: אם a^2 זוגי אז a זוגי, ואז b^2 חייב להיות זוגי גם כן, ויצא ששניהם זוגיים בסתירה לכך שהשבר מצומצם. בונוס: כאחוז אחד. כלל מצוין לבנייה, ועדיין קירוב.

09 גשר לפרק הבא

STATION 9 · NEXT CHAPTER

נתן מודד את הקרש החדש, והוא מתאים בדיוק. אבל עכשיו הוא יודע את הסוד: האלכסון של סוכה מרובעת הוא לא שבר, לא שום שבר בעולם. בין דפי הפנקס נשאר דף אחד ריק, ומעליו שורה אחת בכתב ידו של סבו: "אם זה לא שבר, מה זה?"

הפרק הבא: שורשים

המספרים שאי אפשר לכתוב כשבר, למה הם בכלל קיימים, ואיך עובדים איתם. שורש 2 הוא רק ההתחלה.

דוגמא לא מוגהת · סעיפים הממתינים להגהת משגיח תוכן תורני (מסומנים ◊)

הפרק מוצג כדוגמה עובדת לפני הגהה סופית. הסעיפים הבאים דורשים אישור של רב או משגיח תוכן לפני פרסום מלא: נוסח כלל המשנה ומקורו (עירובין נז ע"א, ועיון נוסף בעירובין עו ע"ב); פירוט הוכחת בעלי התוספות ושיוכה לסוכה ח ע"א ד"ה כל אמתא; נוסח סוגיית הסוכה העגולה וחשבון "שש עשרה וארבעה חומשים"; השיעור המיוחס לר' אברהם בר חייא (אחת ושני חומשים ועוד כמעט חלק אחד משבעים); נוסח ומיקום קביעת הרמב"ם (פירוש המשניות, עירובין א, ה וב, ה); שיוך הדיון לשו"ת תשב"ץ סימן קסה. כללי הברזל של הסדרה נשמרו: סיפור המסגרת בדיוני ומסומן ככזה, ואף מקור לא הומצא.

10 מקורות

SOURCES

מקורות תורניים

- תוספות סוכה ח ע"א ד"ה כל אמתא.

https://www.dafyomi.co.il/sukah/tosfos/su-ts-008.htm

- סוגיית סוכה ח ע"א.

https://shoresh.app/texts/Sukkah_8a

- Tsaban and Garber, On the Rabbinical Approximation of π, Historia Mathematica 25 (1998) 75-84.

https://doi.org/10.1006/hmat.1997.2185
https://u.cs.biu.ac.il/~tsaban/Pdf/PublishedBackUp/HebpiBU.pdf (עותק)

- לשרשרת הדיון התורני.

https://www.talmudology.com/jeremybrownmdgmailcom/2020/10/12/eruvin-76b-mathematical-error
https://dafdigest.org/masechtos/Eruvin%20057.pdf
https://dafyomi.co.il/parsha/masei5.htm (רמב"ם עירובין א ה וב ה)

- ר' אברהם בר חייא (2/5+1+כמעט 1/70).

http://dmle.icmat.es/pdf/GACETAMATEMATICA_1980_32_07-08_02.pdf