פרק דוגמה · ספר הגאומטריה · זרם כללי

האלכסון הנסתר

משפט פיתגורס במסע של כמעט 4,000 שנה: לוח חרס בבלי, אגודה סודית ביוון, וחכמי המדידה. אותה מתמטיקה, אותו נסיון, אחרי פרקי זוויות ישרות וריבועים.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

גרסת חול



01 סיפור מסגרת: הלוח השבור

STATION 1 · FRAME STORY

כל ספר בסדרה נפתח בסיפור מסגרת אחד שממשיך מפרק לפרק. זה הסיפור של ספר הגאומטריה.

מיה, מתמחה צעירה במוזיאון, מקבלת משימה שאף אחד לא הספיק לסיים: לפענח לוח חרס בבלי שבור, בן כמעט 4,000 שנה, שמכיל טבלה מסתורית של מספרים. הלוח אמיתי, וגם הטבלה. הוא נקרא היום פלימפטון 322, והוא יושב באוסף של אוניברסיטת קולומביה בניו יורק.

כל פרק בספר שולח את מיה אחרי רעיון אחד מהטבלה, במסע בין תרבויות ותקופות: בבל, יוון, ארץ ישראל, ספרד, והמעבדות של ימינו. כל עצירה מקרבת אותה לתשובה לשאלה הגדולה: מי כתב את הלוח, ובשביל מה.

מיה היא דמות בדיונית. הלוח, הטבלה, וכל העובדות ההיסטוריות בפרק אמיתיים ומופיעים ברשימת המקורות בסוף.

02 הסיפור הפנימי: אלף שנה לפני פיתגורס

STATION 2 · THE PROBLEM

מיה מסדרת את שורות הטבלה אחת אחת, ובודקת את המספרים. בכל שורה היא מוצאת אותו כלל: ריבוע המספר הקצר ועוד ריבוע המספר הארוך שווה לריבוע של מספר שלישי. שלשות שלמות, שורה אחר שורה, חמש עשרה שורות.

וכאן הבעיה: הלוח בן כ-1,800 לפני הספירה. זה יותר מאלף שנה לפני פיתגורס, האיש שהמשפט הזה נקרא על שמו בכל ספר לימוד. אז מי באמת "גילה" אותו? ומה פיתגורס עצמו בכלל עשה?

וכשהיא מתחילה לחפש, מסתבר שהכלל הזה צץ שוב ושוב במקומות שונים ובשפות שונות, גם הרבה יותר קרוב לבית ממה שחשבה. כדי לענות, צריך לצאת למסע.

הפרק עובר 9 תחנות, בלי יוצא מן הכלל

1 סיפור מסגרת
2 סיפור פנימי
3 היסטוריה
4 מה זה
5 למה זה עובד
6 איך משתמשים
7 נסיון בפועל
8 תרגולים
9 גשר לפרק הבא

03 ההיסטוריה: מסע אחד, עצירת חובה בבית

קודם ציר הזמן של הלוח עצמו, ואחר כך ארבע העצירות של הרעיון בעולם. הליבה היהודית היא חלק מההיסטוריה של כולנו: תרבות וזהות, לא דת.

כ-3,700 שנה

לוח חרס, ככל הנראה מסביבת העיר לרסה בדרום עיראק של היום (הערכת תיארוך: 1820 עד 1762 לפנה"ס), מכיל טבלה של ארבע עמודות ו-15 שורות של מספרים.

סביב 1922

סוחר העתיקות אדגר ג'יימס בנקס מוכר את הלוח לאספן ג'ורג' ארתור פלימפטון, בערך ב-10 דולר.

1936

פלימפטון מוריש את אוספו לאוניברסיטת קולומביה. הלוח מונח באוסף בלי שמבינים מה בו.

1945

המתמטיקאי אוטו נויגבאואר והאשורולוג אברהם זקס מפרסמים: המספרים בלוח הם שלשות פיתגוריות, כלומר מקיימות $a^2 + b^2 = c^2$, יותר מאלף שנה לפני פיתגורס.

הוויכוח נמשך

בשביל מה הלוח שימש? אלינור רובסון (2002) טוענת שזה כלי עזר למורה. דניאל מנספילד ונורמן וילדברגר (2017) טוענים שזו טבלה טריגונומטרית בבלית, וחוקרים אחרים דחו את הטענה הזו. התשובה של מיה תחכה לפרקים הבאים.

ארבע עצירות של אותו רעיון

בבל כ-1,800 לפנה"ס

הלוח מוכיח שהכלל היה ידוע ושימושי למדידה ולבנייה לפחות אלף שנה לפני יוון. הבבלים עבדו בשיטת ספירה על בסיס 60, ולכן טבלה הייתה הדרך שלהם לחשב.

יוון המאה ה-6 לפנה"ס

פיתגורס מקים אגודה שרואה במספרים את סוד היקום. על פי האגדה (לא מקור מתועד היטב), היפאסוס מוכיח שאלכסון הריבוע אינו שבר של מספרים שלמים, והאגודה מטביעה אותו בים. מאחורי האגדה משבר אמיתי: הגילוי ניפץ את האמונה שהעולם כולו בנוי מיחסים שלמים.

ארץ ישראל וספרד אותה שאלה, מבפנים

התלמוד קובע כלל מדידה: "כל אמתא בריבועא, אמתא ותרי חומשי באלכסונא" (עירובין נז ע"א), כלומר אלכסון פי 1.4 מהצלע. בעלי התוספות בודקים ומציינים שהחשבון אינו מכוון. ר' אברהם בר חייא נותן שיעור מדויק יותר. והרמב"ם (פירוש המשניות, עירובין א, ה וב, ה) קובע שאת האלכסון אי אפשר לדעת בדיוק גמור, לא מחולשה אלא מטבע המספר.

העת החדשה

נויגבאואר וזקס (1945) מפענחים את הלוח, ומאז הוא נחקר ועדיין שנוי במחלוקת. המשפט עצמו מופיע היום בכל מסך, מפה ובניין.

המסקנה שמיה לוקחת איתה

אותו סוד התגלה במקומות שונות ובשפות שונות, והפרק היהודי בסיפור הזה הוא חלק מההיסטוריה של כולנו, לא סיפור צד.

04 מה זה

במשולש ישר זווית, הריבוע שבונים על היתר שווה בדיוק לסכום הריבועים שבונים על שני הניצבים.

בסימון מודרני: $a^2 + b^2 = c^2$, כאשר a ו-b הם הניצבים (הצלעות שיוצרות את הזווית הישרה) ו-c הוא היתר (הצלע שמול הזווית הישרה, תמיד הארוכה ביותר).

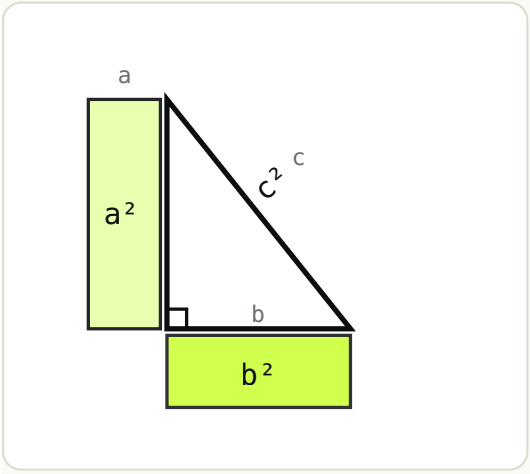
זווית ישרה: זווית של 90 מעלות בדיוק, כמו הפינה של דף.

ניצבים: שתי הצלעות שיוצרות את הזווית הישרה.

יתר: הצלע הארוכה שמול הזווית הישרה. בסוכה של נתן ובלוח של מיה, זה האלכסון.

בריבוע: מספר כפול עצמו. a^2 הוא גם שטח של ריבוע שצלעו a, ולכן המשפט הוא על שטחים, לא רק על אורכים.

דוגמה: ניצבים של 3 ו-4. הריבועים הם 9 ו-16, וביחד 25. היתר הוא המספר שהריבוע שלו 25, כלומר 5. שלשה כזו, 3-4-5, תלווה אותנו לאורך כל הפרק.



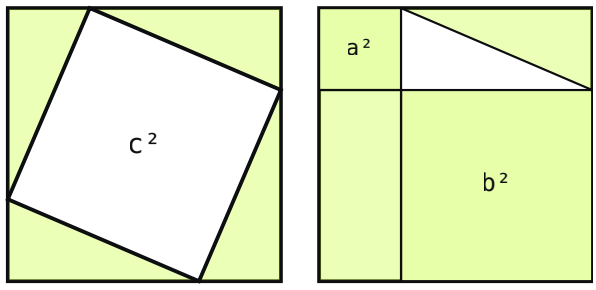
הריבועים על הניצבים שווים ביחד לריבוע על היתר. רואים, לא משננים.

05 למה זה עובד

הוכחת ההזזה: לא "ככה זה, תשננו", אלא הוכחה אחת שרואים בעיניים, ונכונה לכל משולש ישר זווית בעולם.

1 בונים ריבוע גדול שצלעו a + b, ומניחים בפינותיו 4 עותקים זהים של אותו משולש ישר זווית. באמצע נשאר ריבוע מוטה. כל צלע שלו היא היתר c, ולכן שטחו c^2.

2 מסדרים את אותם 4 משולשים מחדש בתוך אותו ריבוע גדול, בלי לשנות אותם. הפעם השטח הפנוי מתפצל לשני ריבועים: אחד a^2 ואחד b^2.



אותו ריבוע גדול, אותם ארבעה משולשים (בירוק). משמאל נשאר c^2, מימין a^2+b^2. השטח הפנוי שווה.

3 אותו ריבוע גדול, אותם 4 משולשים, ולכן השטח הפנוי חייב להיות שווה בשתי הסידורים: $c^2 = a^2 + b^2$. זה הכול.

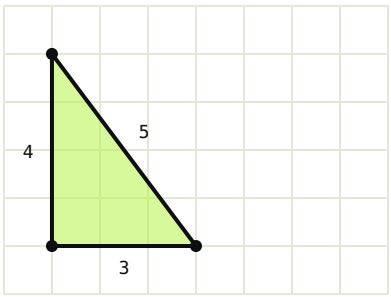
שימו לב מה קרה כאן: לא מדדנו משולש אחד וקיווינו לטוב. הראינו שהשוויון נכון לכל a וכל b, כי ההזזה עובדת תמיד. זה ההבדל בין ניחוש להוכחה.

עכשיו הסוד ברור

אלכסון של ריבוע שצלעו 1: לפי המשפט $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. כלומר c הוא המספר שהריבוע שלו 2. כלל המשנה, 1.4, נותן $1.4^2 = 1.96$. קרוב, אבל לא 2. הפער הקטן הזה הוא בדיוק "טפי פורתא" של בעלי התוספות, והסיבה שהרמב"ם קובע שדיוק גמור לא יושג לעולם: אין שבר שריבועו 2. המספר הזה נקרא היום שורש 2.

בדיקה קטנה על נייר משבצות

סמנו על דף משבצות משולש עם ניצבים של 3 ו-4 משבצות, ובנו ריבוע על כל צלע. ספרו משבצות: 9, 16 ו-25. עכשיו נסו ניצבים של 2 ו-3: הריבועים הם 4 ו-9, וביחד 13. איזו צלע שלמה נותנת ריבוע של 13? אין כזו, והיתר יוצא בין 3 ל-4 משבצות. גם כאן המספרים מסרבים לצאת שלמים, בדיוק כמו באלכסון של הסוכה.



3 משבצות ו-4 משבצות נותנים בדיוק 5. ספרו בעצמכם: 9 ועוד 16 הם 25.

נסו גם בבית

חצי משבצת גם עובד: ניצבים של 1.5 ו-2 נותנים היתר של 2.5 בדיוק. ואם תכפילו את 3-4-5 פי שתיים תקבלו 6-8-10, עוד שלשה שלמה. יש אינסוף שלשות כאלה, והמשפט מוצא את כולן. לסיום, מדדו אלכסון של משהו קטן בבית: מסך טלפון, פתק, מגש. חשבו אותו קודם בראש, ואז בדקו בסרגל. אם הניחוש יצא מדויק, סימן שהמשפט כבר שלכם.

06 איך משתמשים

STATION 6 · IN REAL LIFE

זווית ישרה בלי מד זווית

בנאי מסמן על הקרקע 3 ו-4 מטרים, מודד שהאלכסון יוצא 5, ויודע שהפינה ישרה בדיוק. כך עובדים בנאים עד היום.

מרחקים בלי להגיע

רוחב של נהר, גובה של מגדל, דרך קצרה מעל חצר: מודדים שתי צלעות נוחות ומחשבים את השלישית.

ניווט ו-GPS

המרחק שהטלפון מחשב בין שתי נקודות על המפה נגזר מהפרשי הצפון-מזרח, בדיוק לפי המשפט הזה.

גודל מסך

ה"אינטשים" של טלוויזיה או טלפון הם אורך האלכסון של המסך. רוחב וגובה נכנסים, אלכסון יוצא.

החזרה ללוח של מיה

שורה אחת בטבלה: 119 ו-120. הריבועים 14,161 ו-14,400 מסתכמים ב-28,561, שזה בדיוק 169 בריבוע. הבבלי שכתב את הלוח ידע בדיוק מה הוא עושה.

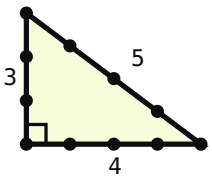
בנייה קדומה

חבלים עם קשרים שימשו מודדים ובנאים לסידור זוויות ישרות בשטח, אלפי שנים לפני שהיה מד זווית.

07 נסיון בפועל: חבל 12 הקשרים

STATION 7 · HANDS ON

1. קחו חבל, וסמנו עליו 12 קשרים במרחקים שווים. המרחק יכול להיות אגרוף אחד שלכם.
2. קופלו את החבל למשולש: 3 קטעים לצלע אחת, 4 קטעים לשנייה, 5 קטעים לשלישית, והחזיקו בקשרים שבפינות.
3. הזווית שבין הצלע של 3 לצלע של 4 תצא ישרה בדיוק, בלי מד זווית בכלל. בדקו מול פינת דף.
4. ועכשיו הפוך: מדדו את החדר שלכם באורך וברוחב, חשבו את האלכסון לפי המשפט, ואז בדקו עם החבל או עם סרגל. ניחוש מדויק בפעם הראשונה.



חבל עם 12 קשרים במרחקים שווים, מקופל ל-3-4-5: זווית ישרה מושלמת.

למה זה עובד?

כי 3^2 ועוד 4^2 הם 9 ועוד 16, כלומר 25, שזה 5^2. כל משולש שהצלעות שלו מקיימות את המשפט חייב להיות ישר זווית. זה המשפט ההפוך, והוא הבסיס לבדיקת הזוויות של הבנאים.

08 תרגולים

רק עכשיו, אחרי שיש למה ואיך. התרגילים מדורגים: שלשות שלמות, בעיות מהחיים, ובסוף האתגר האמיתי.

רמה 1 · שלשות שלמות

1. הניצבים 3 ו-4. מה היתר?
2. הניצבים 5 ו-12. מה היתר?
3. הניצבים 6 ו-8. מה היתר? (רמז: תשימו לב לקשר ל-3-4-5.)

רמה 2 · מהחיים

1. חדר של 3 מטר על 4 מטר. מרצפים פס שטיח באלכסון, מפינה לפינה. כמה מטר שטיח צריך?
2. סולם נשען על קיר. בסיס הסולם 1.5 מטר מהקיר, וראשו מגיע לגובה 2 מטר. כמה ארוך הסולם?
3. מסך מלבני ברוחב 40 ס"מ ובגובה 30 ס"מ. מה גודל המסך באלכסון, כמו שכותבים בחנות?

רמה 3 · האתגר

1. תוכיחו שאלכסון של ריבוע שצלעו 1 לא יכול להיות שבר. הדרך: נניח שהוא שבר מצומצם a/b. אז $a^2 = 2b^2$. מה אפשר להסיק מכאן על a, זוגי או אי זוגי? ומה נובע מזה על b? ולמה זו סתירה?
2. בונוס, חזרה לכלל המשנה: לפי כלל 1.4, אלכסון של ריבוע 5 על 5 אמות הוא 7 אמות. בדקו במחשבון: שורש 50 הוא בערך 7.071. בכמה אחוזים בערך טועה הכלל? פחות או יותר מאחוז אחד?

פתרונות בקצרה

רמה 1: 5, 13, 10 (פי שתיים מ-3-4-5). רמה 2: 5 מטר; 2.5 מטר; 50 ס"מ. רמה 3: אם a^2 זוגי אז a זוגי, ואז b^2 חייב להיות זוגי גם כן, ויצא ששניהם זוגיים בסתירה לכך שהשבר מצומצם. בונוס: כאחוז אחד. כלל מצוין לבנייה, ועדיין קירוב.

09 גשר לפרק הבא

STATION 9 · NEXT CHAPTER

מיה סוגרת את הלוח עם תשובה אחת ושאלה חדשה: המספרים בטבלה שלמים, אבל האלכסון שהם מסתירים אינו שבר, לא שום שבר בעולם. בשורה השבורה של הלוח חסר מספר אחד, והיא כבר יודעת איך למצוא אותו: "אם זה לא שבר, מה זה?"

הפרק הבא: שורשים

המספרים שאי אפשר לכתוב כשבר, למה הם בכלל קיימים, ואיך עובדים איתם. שורש 2 הוא רק ההתחלה.

דוגמא לא מוגהת · הערות לבדיקה לפני פרסום מלא

הפרק מוצג כדוגמה עובדת לפני הגהה סופית. הסעיפים המסומנים ◊ נסמכים על מקורות תורניים, ויעברו הגהה של מומחה לתוכן יהודי לפני פרסום מלא: נוסח כלל המשנה (עירובין נז ע"א), בדיקת בעלי התוספות, השיעור של ר' אברהם בר חייא, וקביעת הרמב"ם (פירוש המשניות, עירובין א, ה וב, ה). סיפור היפאסוס מוצג במפורש כאגדה ולא כעובדה מתועדת. מיה היא דמות בדיונית; הלוח, הטבלה והציטוטים אמיתיים.

10 מקורות

SOURCES

פלימפטון 322 (אומתו)

- Mansfield, Foundations of Science 2021: בנקס מכר לפלימפטון בערך 1922, הוריש לקולומביה ב-1936, נויגבאואר וזקס 1945.
https://link.springer.com/article/10.1007/s10699-021-09806-0
- Robson, MAA: כ-10 דולר, אזור לרסה.
https://old.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Robson105-120.pdf
- Columbia Libraries: תיארוך 1762-1820 לפנה"ס.
https://online-exhibitions.library.columbia.edu/exhibits/show/jewels/themes/science/158
- Mansfield & Wildberger 2017, Historia Mathematica (הטענה הטריגונומטרית).
https://doi.org/10.1016/j.hm.2017.08.001
- Robson 2001 (הטענה לכלי עזר למורה).
https://doi.org/10.1006/hmat.2001.2317
- ביקורת על הטענה הטריגונומטרית.
https://www.scientificamerican.com/blog/roots-of-unity/dont-fall-for-babylonian-trigonometry-hype

הליבה היהודית התרבותית

- תוספות סוכה ח ע"א ד"ה כל אמתא.
https://www.dafyomi.co.il/sukah/tosfos/su-ts-008.htm
- סוגיית סוכה ח ע"א.
https://shoresh.app/texts/Sukkah_8a
- Tsaban and Garber, On the Rabbinical Approximation of π, Historia Mathematica 25 (1998) 75-84.
https://doi.org/10.1006/hmat.1997.2185
- רמב"ם, פירוש המשניות, עירובין א ה וב ה.
https://dafyomi.co.il/parsha/masei5.htm