פרק דוגמה · ספר החדו״א · זרם כללי

המדרגה שאין לה סוף

החץ של זנון, שתקף את התנועה עצמה — ואיך מגיעים ליעד בצעדים שקטנים וקטנים בלי סוף. אחרי פרקי היחס והפונקציה: גבול, ואיך מחשבים בידיים שטח של עיגול מרצועות דקות של מלבנים.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$$



01 למה גבול

WHY LIMITS · חול

הגבול הוא הדוגמה המושלמת למחלה שהשיטה מרפאת גם בחדו״א:

דקלום בלי למה

״הגבול שואף ל־L כש־x שואף ל־a — אל תשאלו מה זה שואף, קדימה נגזרות״. מכירים נוסחאות, לא מבינים מה הן אומרות.

סיפור בן 2,400 שנה

זנון מאליאה שאל שאלה שאיריסטו כבר ניסה לענות עליה ולא הצליח עד הסוף: איך בכלל משהו זז?

משבר אמיתי בלב הסיפור

החץ חוצה חצי דרך, ואז רבע, ואז שמינית — אינסוף צעדים. ועדיין הוא פוגע במטרה. איך אינסוף צעדים נגמר בזמן סופי?

נסיון שכל ילד יכול לעשות היום

חוצים את החדר בצעדים שכל אחד מהם חצי מקודמו — והרגל אף פעם לא עוברת את הקיר, רק נצמדת אליו.

02 מבנה הפרק

SAME 9 STATIONS, VISIBLE TAGS

הפרק עובר את אותן 9 תחנות, אותו נסיון ואותם תרגולים — כמו כל פרק במשרד הלימוד. הפרק שייך לזרם הכללי, ולכן כל התוכן בו הוא חול, למעט עצירות מתויגות תורני — תיבות מקור מהמסורת התורנית, מסומנות בגלוי עם המקור המדויק. אותו כלל מופיע גם על הכרטיס באתר: כל פרק מצהיר מה בו.

כל פרק עובר 9 תחנות — בלי יוצא מן הכלל

1 סיפור מסגרת אמיתי	2 סיפור פנימי	3 היסטוריה
4 מה זה	5 למה זה עובד	6 איך משתמשים
7 נסיון בפועל	8 תרגולים	9 גשר לפרק הבא

מה זה (סימון מודרני): גבול הוא הערך שאליו תהליך מתקרב כמה שרוצים, גם אם הוא לעולם לא נוגע בו. כותבים lim, וקוראים: ״שואף ל־״.

הסיפור הפנימי — החץ של זנון: זנון מאליאה (המאה ה־5 לפנה״ס) טען: בכל רגע נתון החץ תופס מקום השווה בדיוק לגודלו — כלומר נח. ואם הוא נח בכל רגע ורגע, מתי הוא זז? אריסטו מספר את הטיעון ונאבק בו (פיזיקה ו׳, 239b). הפתרון המודרני: ״מהירות״ אינה תכונה של רגע בודד אלא גבול של יחסים בין רגעות קרובים יותר ויותר. אינסוף רגעים של אפס־תנועה יכולים להצטרף לתנועה של ממש.

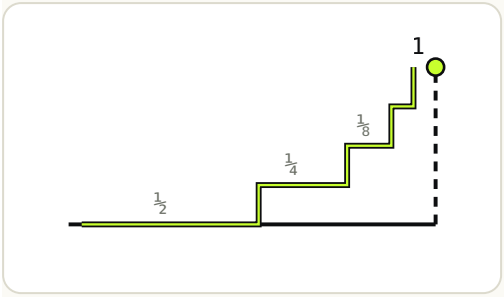
למה זה עובד: צועדים חצי דרך אל הקיר, ואז חצי מהנשאר, וחוזר חלילה. אחרי n צעדים נשארו בדיוק $1/2^n$ מהדרך. אינסוף צעדים, אבל הסכום ½+¼+⅛+⋯ שווה בדיוק 1: השארית קטנה מכל מספר שמישהו יבחר — וזו כל ההגדרה של גבול.

איך משתמשים: שטחים של צורות עגולות (מיד בנסיון), מהירות רגעית (הפרק הבא), ריבית דריבית רציפה, מסלולי לוויין — בכל מקום ש״רגעי״ או ״אינסופי״ צריכים משמעות מדויקת.

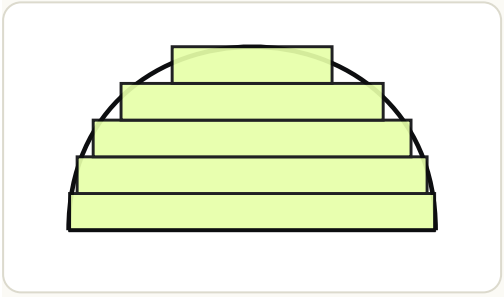
נסיון בפועל: עיגול מרצועות. מציירים עיגול ברדיוס 5 ס״מ על נייר משבצות, מחלקים את חצי העיגול לרצועות אופקיות בגובה 1 ס״מ, מודדים כל רצועה כאילו היא מלבן, סוכמים ומכפילים פי שתיים. עם 5 רצועות יוצא כ־79.3 סמ״ר, עם 10 רצועות כ־78.8 — והערך המדויק, πr^2, הוא 78.54. ככל שהרצועות דקות יותר, הסכום נצמד לערך האמיתי.

תרגולים (רק עכשיו): מדורגים — קודם סכומי חצאים על ציר המספרים, אחר כך רצועות לעיגול בעוביים שונים, ולבסוף האתגר: תוכיחו שסכום הצעדים לעולם לא עובר את 1.

גשר לפרק הבא: אם אפשר לסכום אינסוף צעדים — מה קורה כששואלים ״מה המהירות ברגע אחד בדיוק״? הפרק הבא: הנגזרת.



כל צעד חצי מקודמו: המדרגה מתקרבת לקו 1, והשארית קטנה מכל מספר שיבחרו.



חצי עיגול מחולק לחמש רצועות. מודדים כל רצועה כמלבן — וסוכמים.

שאלת הפרק — איך מודדים מה שלא יוצא בדיוק — עמדה במרכז המקורות התורניים מאות שנים לפני שהמושג "אי־רציונלי" קיבל שם. שלוש עצירות, כולן תורני, עם המקור המדויק:

תורני

"כל שיש בהקיפו שלשה טפחים — יש בו רוחב טפח"

משנה, עירובין פרק א׳ משנה ה׳

כלומר: היקף העיגול נלקח כפי 3 מהקוטר. המשנה קובעת זאת כשיעור הלכתי — קורה עגולה נחשבת כמרובעת לפי הכלל הזה.

תורני

"עשר באמה משפתו עד שפתו עגל סביב... וקו שלשים באמה יסב אותו סביב"

מלכים א׳ ז,כג — והדיון עליו: תלמוד בבלי, עירובין יד ע"א

התלמוד מביא את הפסוק על הים שעשה שלמה ומיד שואל: "והא איכא שפתו?!" — לכלי יש שפה בעובי טפח, אז איך המספרים מסתדרים? התשובה: השפה נעשתה כעין פרח שושן, והמדידה "מגואי קא חשיב" — נמדדת מבפנים. הגמרא בעצמה בודקת את דיוק המדידה.

תורני

"יחוס אלכסון העגולה אל המסבב אותה בלי ידוע, ואי אפשר לדבר בו לעולם באמת... ולפי שזה לא יושג לעולם אלא בקרוב, לקחו הם בחשבון הגדול ואמרו: כל שיש בהקיפו שלשה טפחים יש בו רוחב טפח"

רמב"ם, פירוש המשניות, עירובין א׳ ה׳

הרמב"ם קובע: היחס בין ההיקף לקוטר לא יימדד בדיוק לעולם — לא מחולשתנו אלא מטבע הדבר — ולכן חכמים לקחו שיעור מעוגל למדידה. את הקירוב המדויק יותר, 1 ל־3 ושביעית (22/7), הוא מייחס ל"חכמי התשבורת".

חול · קריאה מודרנית

השרשרת המלאה — ומה לא כתוב במקור

ארכימדס (המאה ה־3 לפנה"ס) חסם את π בין 10/71 לבין 1/7 3 — והקירוב העליון שלו הוא בדיוק ה־22/7 שהרמב"ם מצטט כ"מופת" של חכמי המדידות. רק ב־1761 הוכיח למברט ש־π אינו שבר של שני שלמים. הרמב"ם לא טען שהוא מוכיח זאת; הוא כתב שאי אפשר לדעת בדיוק. לקרוא בדבריו הבנה מוקדמת של אי־רציונליות זו קריאה מודרנית — רבים מקבלים אותה, ויש החולקים. סומן לביקורת תוכן.

05 מה הפרק מדגים

WHY THE METHOD WORKS

חול

למה הפרק הזה מוכיח שהשיטה עובדת גם בחדו״א:

1. אותו שלד: סיפור מסגרת אמיתי (החץ של זנון), הוכחה שרואים (סכום החצאים), נסיון בידיים (רצועות לעיגול) — בלי לשנן נוסחה אחת.

2. תיוג גלוי: הקורא יודע בכל רגע איזה תוכן לפניו — חול או תורני — ומה מקורו. השקיפות עצמה חלק מהשיטה, לא עיטור.

3. שאלת הקירוב היא גשר תרבותי אמיתי: אותה שאלה נשאלה באליאה ובעירובין — בכלים שונים, במטרות שונות, ובדיוק מפתיע: הגמרא שואלת ״והא איכא שפתו״ כמו שהנדסן שואל על סבולת המדידה.

4. הנסיון מוכיח: πr^2 אינה נוסחה לדקלום אלא גבול של סכומי מלבנים — תוצאה שאפשר להרגיש בידיים עם נייר משבצות וסרגל.

הערת יישור

המקורות התורניים בפרק (משנה עירובין א,ה; תלמוד עירובין יד ע״א; מלכים א ז,כג; רמב״ם פירוש המשניות שם) אומתו מול ספריה (sefaria.org) בלשון המקור. הניסוח הסופי לספר דורש עין של רב/משגיח תוכן. הקריאה המודרנית המחברת את דברי הרמב״ם לאי־רציונליות מסומנת בפרק כשנויה במחלוקת.

06 מקורות

SOURCES

חול (אומתו)

- החץ של זנון — אריסטו, פיזיקה ו׳, 239b.

https://classics.mit.edu/Aristotle/physics.6.vi.html

- הטור ½+¼+⅛+⋯ = 1 (טור גיאומטרי מתכנס).

https://en.wikipedia.org/wiki/1/2_%2B_1/4_%2B_1/8_%2B_1/16_%2B_%E2%8B%AF

- ארכימדס, מדידת המעגל: משפט 1 (שטח העיגול שווה למשולש ישר־זווית שצלעותיו הרדיוס וההיקף) ומשפט 3 (החסימה $3\ 10/71 < \pi < 3$ 1/7).

https://en.wikipedia.org/wiki/Measurement_of_a_Circle

- למברט 1761 — π אי־רציונלי.

https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_that_%CF%80_is_irrational

- חשבון הרצועות בנסיון חושב מחדש עבור הפרק; רדיוס 5, גובה רצועה 1 ו־0.5, רוחב לפי משפט פיתגורס.

תורני (אומתו מול ספריה)

- משנה, עירובין א׳ ה׳.

https://www.sefaria.org/Mishnah_Eruvin.1.5

- תלמוד בבלי, עירובין יד ע״א (ים של שלמה: ״והא איכא שפתו״, ״מגואי קא חשיב״).

https://www.sefaria.org/Eruvin.14a

- רמב״ם, פירוש המשניות, עירובין א׳ ה׳.

https://www.sefaria.org/Rambam_on_Mishnah_Eruvin.1.5

- מלכים א׳ ז,כג.

https://www.sefaria.org/I_Kings.7.23